UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA
CENTRO LOCAL METROPOLITANO
ÁREA DE MATEMÁTICA

MODELO DE RESPUESTA
SEGUNDA PRUEBA INTEGRAL
MATEMÁTICA I (175 – 176 – 177)
Lapso 2.004-1

OBJ 1 PTA 1

Si α y β son las aproximaciones por **defecto** y por **exceso** con **cinco cifras significativas** del número **564,279**, entonces $\frac{\alpha+\beta}{2}$ es igual a:

Solución

De acuerdo a la definición de aproximaciones por defecto y por exceso y de cifras significativas dadas en las páginas 70-71 del Módulo I, tenemos que:

$$\alpha = 564,27 \quad \text{y} \quad \beta = 564,28.$$

Entonces:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{564,27+564,28}{2} = \frac{1128,55}{2} = 564,275$$

OBJ 2 PTA 2

Verifica que:

$$\left[(2+\sqrt{5})^{-1}+1\right]^{-1} + \left[(2-\sqrt{5})^{-1}+1\right]^{-1} = 2$$

Solución

$$\left[(2+\sqrt{5})^{-1}+1\right]^{-1} = \left[\frac{1}{2+\sqrt{5}}+1\right]^{-1} = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right]^{-1} = \frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

$$\left[(2-\sqrt{5})^{-1}+1\right]^{-1} = \left[\frac{1}{2-\sqrt{5}}+1\right]^{-1} = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right]^{-1} = \frac{2-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

Sumando las expresiones obtenidas, resulta:

$$\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + \frac{2-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(2+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5+6-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto no se verifica la igualdad

OBJ 3 PTA 3

Indica los números naturales que están en el conjunto:

$$A = \{ x \in \mathrm{IR} \,/\, \left| \frac{1}{5}\,x - \frac{1}{5} \right| < 1 \},$$

Solución

Según lo señalado en la p.155 del Módulo I, tenemos

$$\left| \frac{1}{5}\,x - \frac{1}{5} \right| < 1 \iff -1 < \frac{1}{5}\,x - \frac{1}{5} < 1$$

$$\iff -1 + \frac{1}{5} < \frac{1}{5}\,x < 1 + \frac{1}{5}$$

$$\iff -\frac{4}{5} < \frac{1}{5}\,x < \frac{6}{5}$$

$$\iff -4 < x < 6.$$

Por lo tanto:

$$A = \{ x \in \mathrm{IR} \,/\, -4 < x < 6 \} = (-4\,,\,6)$$

Los número naturales del intervalo (-4 , 6) son {0, 1, 2, 3, 4, 5}

OBJ 4 PTA 4

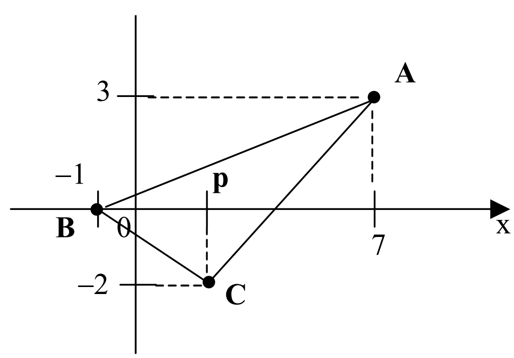
Determina el valor de "**p**" de tal forma que los puntos:

A (7, 3), B (–1, 0), C (p, –2),

sean los vértices de un triángulo rectángulo, con ángulo recto en B.

Solución

Los puntos A(7,3), B(–1, 0) y C(p, –2) deben formar un triángulo rectángulo con ángulo recto en B. suponemos p como en la siguiente gráfica: y



Para que el ángulo recto esté en el punto B, el lado AC, debe ser la hipotenusa del triángulo. Por lo tanto, se debe cumplir que $|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|^2$. (*)

Usamos la fórmula de la distancia entre dos puntos del plano, (ver página 46, Unidad 4, Módulo II del texto), para hallar las longitudes de los segmentos AB, BC y AC.

En efecto;

$$|AB| = d(A(7,3);\ B(-1,0)) = \sqrt{\left(7-(-1)\right)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{73}\,.$$

$$|BC| = d(B(-1,0);\ C(p,-2)) = \sqrt{\left(p-(-1)\right)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(p+1)^2 + 4}$$

$$|AC| = d(A(7,3);\ C(p,-2)) = \sqrt{(p-7)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{(p-7)^2 + 25}\,.$$

Ahora,

$$|AB|^2 = 73 \quad , \quad |BC|^2 = (p+1)^2 + 4 \quad \text{y} \quad |AC|^2 = (p-7)^2 + 25.$$

Entonces, según la expresión (*) tenemos:

$$73 + (p+1)^2 + 4 = (p-7)^2 + 25$$

De donde,

$$73 + p^2 + 2p + 1 + 4 = p^2 - 14p + 49 + 25.$$

Luego,

$$16p = -4,$$

por tanto:

$$p = -1/4 \quad \blacklozenge$$

OBJ 5 PTA 5

Para el logro de este objetivo debes responder correctamente **dos** opciones.

Responde con una **V** si los enunciados siguientes son verdaderos o con una **F** si son falsos:
Justifica tus respuestas

a. Una función f definida en un intervalo J es **creciente** si se verifica la siguiente propiedad: $f(x_1) > f(x_2)$ para todos los x_1, x_2 del intervalo **J** satisfaciendo $x_1 < x_2$ ____.

b. Una función f definida en un intervalo J es **decreciente** si se verifica la siguiente propiedad: $f(x_1) < f(x_2)$ para todos los x_1, x_2 del intervalo **J** satisfaciendo $x_1 < x_2$ _____.

c. La función h: R $\rightarrow$ R definida por h(t) = 5t +2 es **decreciente**. ___.

Solución

a. F Ver la definición de función Creciente dada en la página del Módulo II del texto.

b. F Ver la definición de función Decreciente dada en la página del Módulo II del texto.

c. F Una forma de ver esto es haciendo la gráfica de h y observando que a medida que t crece los valore de h(t) también crecen, es decir h es una función creciente.
Otra manera de ver esto es tomar $x < y$, entonces $5x < 5y$ y también tenemos que $5x + 2 < 5y + 2$ y así resulta que $h(x) < h(y)$, es decir h es creciente.

OBJ 6 PTA 6

Sean g, h: I**R** $\rightarrow$ I**R** funciones tales que: $h(x) = 2x - 1$ y $f(h(x)) = 4x^2 + 4x$. Si **z** es tal que $f(h(\mathbf{z})) = 3$, calcula $h(\mathbf{z} - \mathbf{1})$.

Solución

Como $f(h(\mathbf{z})) = 3$, resulta que: $4\mathbf{z}^2 + 4\mathbf{z} = 3$. Resolviendo tenemos:

$$4\mathbf{z}^2 + 4\mathbf{z} - 3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{z} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} . \Leftrightarrow \mathbf{z} = -\frac{3}{2} \text{ o } \mathbf{z} = \frac{1}{2}.$$

De esta manera tenemos dos respuestas dependiendo del valor de **z** que tomemos:

Para $\mathbf{z} = -\dfrac{3}{2}$ resulta

$$h(\mathbf{z} - \mathbf{1}) = h(-\frac{3}{2} - 1) = h(-\frac{5}{2}) = 2(-\frac{5}{2}) - 1 = -6$$

Para $\mathbf{z} = \dfrac{1}{2}$ resulta

$$h(\mathbf{z} - \mathbf{1}) = h(\frac{1}{2} - 1) = h(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2}) - 1 = -2.$$

OBJ 7 PTA 7

A continuación te presentamos el número de vehículos que pasó por una esquina en un lapso de tiempo de un día lunes. Los datos son tomados cada cinco minutos.

12	13	14	10	17	10	15	15	14
11	12	22	15	17	12	11	17	12
10	11	19	15	19	14	12	18	15

Divide este grupo de datos en 5 intervalos de clases y determina la frecuencia absoluta y relativa del primero de estos intervalos.

Solución

El dato menor es 10 y el mayor 19. Como queremos dividir los datos en 5 intervalos de clase, consideraremos intervalos de longitud (ver páginas 179 , 187-189 del Módulo II):

$$L = \frac{\mathbf{22-10}}{\mathbf{5}} = 2{,}4.$$

Así resultan los 5 intervalos de clase:

$$[10 ; 12{,}4) \ , \quad [12{,}4 ; 14{,}8) \ , [14{,}8 ; 17{,}2) \ . \ [17{,}2 ; 19{,}6) \ , \ [19{,}6 ; 22]$$

La frecuencia absoluta del primer intervalo es el número de datos en este intervalo (ver p.176 del Módulo II). En este caso es igual a 11.

La frecuencia relativa del primer intervalo es el cociente entre la frecuencia absoluta del intervalo y el número total de datos (ver p.177 del Módulo II). En nuestro caso, la frecuencia relativa es igual a $\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{27}} \approx 0{,}47047$.

OBJ 8 PTA 8

Calcula la suma de los números naturales **múltiplos 7** comprendidos entre **1** y **38.543.**

Solución

Los múltiplos de siete comprendidos entre 1 y 38.543 son:

$$7,\ 14\ ,\ 21\ ,\ 28\ ,\ \ldots\ ,\ 38\ 542$$

o equivalentemente:

$$7.1\ ,\ 7.2\ ,\ 7.3\ ,\ 7.4\ ,\ \ldots\ ,\ 7.\ 5\ 506.$$

Estos números forman una progresión aritmética de razón 7.

De acuerdo a la fórmula dada en la p.27 del texto la suma de estos números es:

$$S_{5\,506} = \frac{a_1 + a_{5\,506}}{2} = \frac{7 + 38\,542}{2}\, 5\,506 = \mathbf{106\ 125\ 397.} \qquad \blacklozenge$$

OBJ 9 PTA 9

Sea $f: \mathbf{IR}^{+} \to \mathbf{IR}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Calcula

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Solución (ver ejercicio 5 p. 100 del Módulo III)

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}\right)\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$$ (Multiplicando por la conjugada del numerador)

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}$$ (¿Por qué?)

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$ (Simplificando y evaluando en el límite). ♦

Matemáticas I (175)

OBJ 10 PTA 10
Si un cono de altura **h = 30 cm** y radio **r = 20 cm**, le aumentamos la altura en 40% y el radio se le disminuye en 10%, entonces el volumen del nuevo cono es:

Justifica tu Respuesta

a. 4000π cm^3 **b.** $1020{,}6\pi$ cm^3 **c.** $1{,}134\pi$ cm^3 **d.** 4536π cm^3.

Solución

Sabemos que el volumen de un cono de altura h y radio r está dado por la fórmula (ver p.70 del Módulo IV (175): $\mathbf{V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}}$.

La altura se incrementa en un 40% de h, así la nueva altura es

$$H = h + \frac{40}{100}h = h + 0{,}4h = 1{,}4h = 1{,}4 \,.\, 30 \text{ cm} = 42 \text{ cm}$$

El radio es disminuido en un 10% de r esto es 0,1r. Entonces l el nuevo radio es igual a:

$$R = r - 0{,}1r = 0{,}9r = 0{,}9 \,.\, 20 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

Entonces el volumen de nuevo cono obtenido es

$$\frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi\, 42(18r)^2}{3} = 4536\,\pi \text{ cm}^3.$$

Opción correcta **d.**

OBJ 11 PTA 11

Determina si la sucesión cuyos primeros tres términos son $-\frac{7}{5},\ -\frac{31}{15},\ -\frac{41}{15}$ es una progresión aritmética y en caso afirmativo calcula el cuarto término de la sucesión.

Solución

Al hacer la diferencia de dos términos consecutivos, tenemos:

$$a_2 - a_1 = -\frac{31}{15} - (-\frac{7}{5}) = -\frac{31}{15} + \frac{7}{5} = \frac{-31+21}{15} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}.$$

$$a_3 - a_2 = -\frac{41}{15} - (-\frac{31}{15}) = -\frac{41}{15} + \frac{31}{15} = -\frac{10}{15} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}.$$

Como la diferencia entre términos consecutivos la sucesión es una progresión aritmética (ver p.142 del Módulo IV (175))de razón $\mathbf{r} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$.

Observa que:

$$a_1 = -\frac{7}{5} \quad , \quad a_2 = -\frac{31}{15} = -\frac{7}{5} - \frac{2}{3} = a_1 + r$$

$$a_3 = -\frac{41}{15} = -\frac{31}{15} - \frac{2}{3} = a_2 + r$$

Su cuarto término es:

$$a_4 = a_3 + r = -\frac{41}{15} + (-\frac{10}{15}) = -\frac{41}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{51}{15}.$$

También se puede calcular usando la fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r \,, \quad n \geq 1$$ ♦

Matemáticas I (176)

OBJ 10 PTA 10

Una empresa vende semanalmente 5.000 piezas de un producto a un precio de Bs. 200 la unidad. Mientras que si el precio es de Bs. 100, vende solo 4000 unidades. Determina la ecuación de la oferta de este bien, sabiendo que la relación entre la oferta S y el precio P es lineal.

Solución:

Como la relación entre el precio y la oferta es lineal, tenemos una ecuación de la oferta del tipo:

$$S = a + bP.$$

Según los datos suministrados, resulta:

$$5000 = a + 200b \ [`1\,] \quad , \quad 4000 = a + 100b \ [`2\,] .$$

Restando [2] a [1], obtenemos:

$$1000 = 100b \ . \ \ \mathbf{b = 10}.$$

Sustituyendo este valor de b en [`1], se tiene:

$$5000 = a + 2000 \ , \ \ \mathbf{a = 3000}.$$

En consecuencia la ecuación pedida es:

$$S = 3000 + 10P$$

OBJ 11 PTA 11

Una persona compra el mismo día dos bienes A y B, por Bs.80 y Bs. 120, respectivamente. La función valor del bien A, V_t^A, viene dada por:

$$V_t^A = \alpha\ e^{-\beta t}\ ,\ t \geq 0,\ \alpha > 0, \beta > 0 \quad ,$$

mientras que la del bien B, V_t^B, es:

$$V_t^B = a - t^2\ ,\quad t \geq 0\ ,\ a > 0.$$

Determina explícitamente las funciones de valor de cada uno de los bienes si al cabo de tres (3) años, el valor del bien B excede al de A en 50 bolívares.

Solución

De acuerdo con las condiciones del problema se tiene:

$$V_0^A = 80 \quad \text{y} \quad V_0^B = 120\,,$$

es decir,

$$\alpha = 80 \qquad \text{y} \qquad a = 120.$$

Por otro lado, $V_3^B - V_3^A = 50$, por lo que:

$$(120 - 3^2) - 80\ e^{-3\beta} = 50,$$

de donde:

$$e^{-3\beta} = \frac{61}{80}\,,$$

$$\beta = \frac{\operatorname{Ln}\frac{61}{80}}{-3} = \frac{\operatorname{Ln} 0{,}7625}{-3} \approx \frac{-0{,}2712}{-3} \approx 0{,}94\,,$$

En definitiva, las funciones de valor son:

$$V_t^A = 80\ e^{-0{,}94\ t} \qquad V_t^B = 120 - t^2.$$

Matemáticas I (177)

OBJ 10 PTA 10

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones con números reales, utilizando una demostración por agotamiento de casos, analizando las dos situaciones que se presentan, según si y = 0 o y≠ 0.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2xy = -y \end{cases}.$$

Solución

Caso 1: $y = 0$.

El sistema de ecuaciones se transforma:

$$\begin{cases} x^2 = x \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ahora resolviendo la ecuación $x^2 = x$, tenemos:

$$\mathbf{x^2 = x} \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x\,(x-1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 0\ \ o\ \ x = 1}.$$

Por lo tanto, hay dos soluciones que resuelven el sistema:

$$x = 0\ ,\quad y = 0 \quad \text{ó} \quad x = 1,\quad y = 0.$$

Caso 2: $y \neq 0$.

En la ecuación $2xy = -y$ se puede simplificar por y, resultando $3x = -1$, luego $x = -\frac{1}{3}$.

Al sustituir este valor en la primera ecuación del sistema, obtenemos:

$$\frac{1}{9} - y^2 = -\frac{1}{3}$$

Por lo tanto,

$$y = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \text{así} \quad y = \pm\frac{2}{3}.$$

Luego, en este caso también tenemos dos soluciones:

$$x = -\frac{1}{3}\ ,\ y = \frac{2}{3} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{1}{3}\ ,\ y = -\frac{2}{3}$$

Resultando, en total, hay cuatro posible soluciones del sistema propuesto. ♦

OBJ 11 PTA 11

Para el logró del objetivos debes responder **dos** partes correctamente.

Modela las siguientes situaciones a través de ecuaciones:

a. La suma de tres números impares consecutivos es igual a 35.

b. Hace quince años la edad de Pedro era el triple de la edad de María.

c. Un número de dos cifras excede en quince a siete veces la suma de sus dígitos

Solución

a. Si denotamos por **x** al primero de los números impares el planteamos nos indica que:

$$\mathbf{x + x + 2 + x + 4 = 35.}$$

Si denotamos por 2n+1 al primer número, resulta la ecuación:

$$\mathbf{2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 = 37}.$$

b. Denotemos por **P** la edad actual de Pedro y por **M** la de María, entonces tenemos que:

$$\mathbf{P - 15 = 3\ (M - 15).}$$

c. Aquí denotamos por **y** la cifras de las unidades del número y por **x** la cifras de las decenas, es decir nuestro número es **xy.** Entonces el planteamiento nos dice que:

$$\mathbf{10x + y = 15 + 7(x + y).}$$

Fin del Modelo