Modelo de Respuesta

Tercera Prueba Integral

Matemáticas I

Cod. 175-176-177

Lapso 2.004-1

OBJ 1 PTA 1

Utilizando ecuaciones, hallar tres números enteros que cumplan las siguientes condiciones:

a. Dos de ellos son consecutivos.

b. La diferencia entre, la suma de los números consecutivos y el otro número, es -14.

c. La suma de los tres números es 20.

Solución
Sean x, y, z los tres números enteros, en virtud de la condición **a.,** supongamos que **x** e **y** son números enteros consecutivos, esto es,

$$x = y + 1 \qquad (1)$$

Por la condición **b.,** tenemos:

$$(x + y) - z = -14 \qquad (2)$$

y por la condición **c**.,

$$x + y + z = 20 \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) en (2) y (1) en (3) se tiene

$$\begin{cases} [(y + 1) + y] - z = -14 \\ (y + 1) + y + z = 20 \end{cases}$$

esto es,

$$\begin{cases} 2y - z = -15 & (4) \\ 2y + z = 19 & (5) \end{cases}$$

sumando (4) y (5) resulta: $4y = 4$ de donde $y = 1$.

Sustituyendo el valor de la variable y en la ecuación (1), tenemos $x = 2$.
Ahora sustituimos los valores obtenidos de x e y la ecuación en (3) y se obtiene

$$x + y + z = 20$$
$$3 + z = 20$$
$$z = 17.$$

Finalmente los números enteros que satisfacen las condiciones **a, b, c** son: **2 , 1 y 17**.

OBJ 2 PTA 2

Calcular el siguiente producto:

$$\left(5\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{3}\right)\left(1 - 3^{-\frac{7}{2}}\right)$$

Solución

Tenemos que:

$$\left(5\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{3}\right)\left(1 - 3^{-\frac{7}{3}}\right) = 5\sqrt{3} - 5 \,.\, 3^{-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}} - 2\sqrt[3]{3} + 2 \,.\, 3^{-\frac{7}{2}+\frac{1}{3}}$$

$$= 5\sqrt{3} - 5 \,.\, 3^{-\frac{6}{2}} - 2\sqrt[3]{3} + 2 \,.\, 3^{-\frac{19}{6}} = 5\sqrt{3} - \frac{5}{27} - 2\sqrt[3]{3} + 2 \,.\, \frac{1}{\sqrt[6]{3^{19}}}$$

$$= 5\sqrt{3} - \frac{5}{27} - 2\sqrt[3]{3} \; + 2 \, . \frac{1}{27\sqrt[6]{3}}$$

OBJ 3 PTA 3

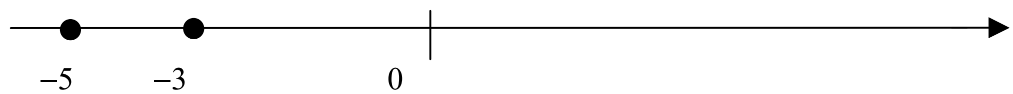
Señala el conjunto solución de la inecuación $\frac{x+1}{x+3} \leq 2$,

Solución

La desigualdad $\frac{x+1}{x+3} \leq 2$ es equivalente a las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x+1}{x+3} - 2 \leq 0 , \quad \frac{x+1-2x-6}{x+3} \leq 0 , \quad \frac{-x-5}{x+3} \leq 0 , \quad \frac{x+5}{x+3} \geq 0 .$$

El numerador y el denominador de $\frac{x+5}{x+3}$ es igual a cero (0) en x = –5 y x = –3 respectivamente. Para referencia, dibujamos estos puntos en un eje real:



Los puntos en negro ( ) que dividen al eje en tres partes, determinan los intervalos siguientes:

(–∞ , –5), (–5 , –3) y (–3 , +∞).

Como $\frac{x+5}{x+3}$ es un cociente de dos polinomios, éste siempre es positivo o siempre es negativo en cada uno de esos un intervalos. Ahora bien, el signo del polinomio $\frac{x+5}{x+3}$ en cada intervalo puede determinarse evaluando el polinomio en un elemento del intervalo conocido como **valor de prueba** – **P(k) –,** ver página 158 en el Módulo I del texto.

El signo del elemento obtenido al evaluar en dicho valor será el signo del polinomio $\frac{x+5}{x+3}$ en dicho intervalo. La Tabla siguiente resume los resultados (verifica toda la tabla) utilizando los valores de prueba:

Intervalo	**k**	**Valor de prueba de** $\frac{x+5}{x+3}$ **para k**	**Signo de** $\frac{x+5}{x+3}$ **en el intervalo**
(–∞, –5)	– 6	$\frac{1}{3}$	+
(–5, –3)	– 4	–1	–
(–3, +∞)	0	$\frac{5}{3}$	+

A partir de la tabla vemos que el conjunto solución de la desigualdad propuesta es:

(–∞ , – 5] U (–3 , +∞).

OBJ 4 PTA 4

Hallar los valores de α y β, para que la recta de ecuación $\mathbf{y - (\alpha + 2\beta)\, x = \beta}$ pasa por los puntos **(0, 3) y (2, 5).**

Solución

Si sustituimos las coordenadas del punto (0, 3) en la ecuación $y - (\alpha + 2\beta)\, x = \beta$ nos queda:

$$3 - (\alpha + 2\beta)\, 0 = \beta, \text{ de donde se obtiene que } \beta = 3.$$

Si sustituimos las coordenadas del punto (2 , 5) en la ecuación $y - (\alpha + 2\beta)\, x = \beta$, nos queda:

$5 - (\alpha + 2\beta)\, 2 = \beta$, de donde se obtiene $5 - 2\alpha - 4\beta = \beta$, es decir, $2\alpha + 5\beta = 5$.

Así, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$2\alpha + 5\beta = 5,$$

$$\beta = 3,$$

que podemos resolver sustituyendo el valor de b en la primera ecuación:

$$2\alpha + 5\beta = 5.$$

Así, obtenemos

$$2\alpha + 5 \,.\, 3 = 5.$$

De donde,

$$\alpha = -5.$$

Entonces, sí $\alpha = -5$ y $\beta = 3$ la ecuación $y - (\alpha + 2\beta)\, x = \beta$ queda:

$y - (-5 + 2 \,.\, 3)\, x = 3$, la cual es equivalente a la ecuación: $y - x = 3$.

Comprueba que los puntos (0, 3) y (2, 5) están sobre la recta hallada.

OBJ 5 PTA 5

Para el logro de este objetivo debes responder correctamente **dos** opciones.

Indica con una **V** si las siguientes afirmaciones son verdaderas o con una **F** si son falsas:

a. La función f: **IR** $\rightarrow$ **IR** de finida por $\mathbf{f(x) = -3x + 8}$ es creciente _____

b. La función g:(0 , +∞) $\rightarrow$ **IR** definida por $\mathbf{g(x) = \frac{1}{x} - 5}$ es creciente _____

c. La función h:(0 , +∞) $\rightarrow$ **IR** definida por $\mathbf{h(x) = x^2 - 3}$ es creciente _____

Solución

De acuerdo a al definición de la p. 126 del Módulo **II** una función m es creciente si dados dos puntos x , y de su dominio, tales que x < y, entonces se verifica que f(x) < f(y).

Sean x, y$\in$**IR**, tales que x < y, entonces:

Caso de función f x, y$\in$**IR** x < y	**Caso de función g** x,y$\in(0, +\infty)$ x < y	**Caso de función h** x,y$\in(0, +\infty)$ x < y
3x < 3y –3x > –3y –3x +8 > –3y +8 f(x) > f(y) f **no es** creciente	$\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ $\frac{1}{x} - 5 > \frac{1}{y} - 5$ g **no es** creciente	$x^2 < y^2$ $y^2 - 3 < x^2 - 3$ h **es** creciente

De esta manera tenemos:

a. **F** **b.** **F** **c.** **V**

OBJ 6 PTA 6

Dadas las funciones f, g , h: **IR** $\rightarrow$ **IR** definidas, respectivamente, por:

$$f(x) = 7, \quad g(x) = \frac{1}{3x^2+1} \quad y \quad h(x) = x^3 + \frac{3}{2}.$$

Calcula $[f \circ g](\sqrt{2}) - [h \circ g]\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Solución

1. $(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{3x^2+1}\right) = 7$. ¿Por qué?

2. $[h \circ g](x) = h\left(\frac{1}{3x^2+1}\right) = \left[\frac{1}{3x^2+1}\right]^3 + \frac{3}{2}$. ¿Por qué?

3. $[f \circ g](\sqrt{2}) = 7$.

4. $[h \circ g]\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \left[\frac{1}{3\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+1}\right]^3 + \frac{3}{2}$.

5. $[f \circ g](\sqrt{2}) - [h \circ g]\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 7 - \left[\frac{1}{3\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+1}\right]^3 + \frac{3}{2} = \frac{14.625}{2.662}$. ¿Por qué?

OBJ 7 PTA 7

En una encuesta sobre el consumo de varios productos se obtuvieron las siguientes frecuencias en las respuesta de los encuestados: 3 , 5 , 9, 2. Determina los valores que se asocian a los puntos $w_1 = 2$ y $w_2 = 3$ si se representan estos datos usando escala aritmética en un segmento de longitud 14 cm.
Recuerda que el cambio de escala viene dado a través de la fórmula

$$x_i = M\,(w_i - 2),\ \text{donde } M = \frac{m}{w_n - w_1}$$

O equivalentemente a través de la recta que pasa por los puntos (w_1 , 0) y (w_n ; 14).

Solución (ver páginas 204 a 206 del Módulo II)

Al ordenar los datos tenemos: $w_1 = 2$, $w_2 = 3$, $w_3 = 5$, $w_4 = 9$.
Entonces

$$M = \frac{m}{w_n - w_1} = \frac{14}{9-2}\ 2\,. \qquad [1]$$

La ecuación de escala es:

$$x_i = 2\,(w_i - 2)$$

Así resultan los puntos:

$$x_1 = 2\,(2-2) = 0 \qquad x_2 = 2(3-2) = 2$$
$$x_3 = 2\,(5-2) = 6 \qquad x_4 = 2\,(9-2) = 14$$

Luego al punto:

$w_1 = 2$ se le asigna el punto $x_1 = 0$

$w_2 = 3$ se le asigna el punto $x_2 = 2$.

Observa que al ecuación de la recta que pasa por los puntos w_1 , 0) y (w_n ; 14) está dada por la ecuación $y = \dfrac{14}{w_n - w_1}(x - w_1) = 2\,(x - 2)$, o que corresponde exactamente a al fórmula dada en [1].

OBJ 8 PTA 8
Encontrar el décimo término y la suma de los primeros diez términos de la progresión **geométrica** cuyo primer término es 1 y cuya razón es 2.

Solución (Ver página 60 y siguientes en el Módulo II).

Sabemos que el n-ésimo término de una progresión geométrica está dado por la fórmula: $a_n = a_1\, r^{\,n-1}$, con $r \neq 1$ (*) .

Aplicando la fórmula (*), se obtiene:

$$a_{10} = a_1\, r^{10-1} = (1)\,(2)^9 = 512.$$

A partir de la fórmula de la suma, ver página 61 y siguientes del Módulo II , obtenemos

$$S_n = a_1\,\frac{1-r^n}{1-r}\quad,\quad r \neq 1,$$

se tiene que:

$$S_{10} = (1)\,\frac{1-2^{10}}{1-2} = \frac{1-1024}{-1} = 1023.$$

♦

OBJ 9 PTA 9

Dada la función f: **IR**– {1} → **IR** la función definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|},$$

donde | | denota el valor absoluto.

Determina si existe límite en **x = 1**.

Solución

Para que exista límite en **x = 1** debe cumplirse que (ver p.92 del Módulo **III**) que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x).$$

Haciendo los cálculos y tomado en cuenta que:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & , \quad x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & , \quad x - 1 < 0 \end{cases},$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{-(x - 1)} \text{ (porque x–1< 0)} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{-(x - 1)} \\ &= -\lim_{x \to 1^-} (x + 1) \\ &= -\mathbf{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \\ &= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ (porque x–1> 0)} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1^-} (x + 1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

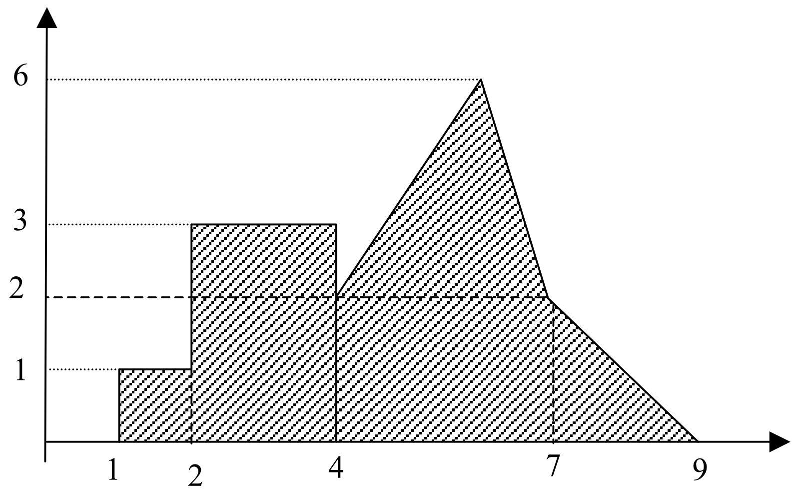
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

y entonces $\lim_{x \to 1} f(x)$ **NO EXISTE** .

Matemáticas 175

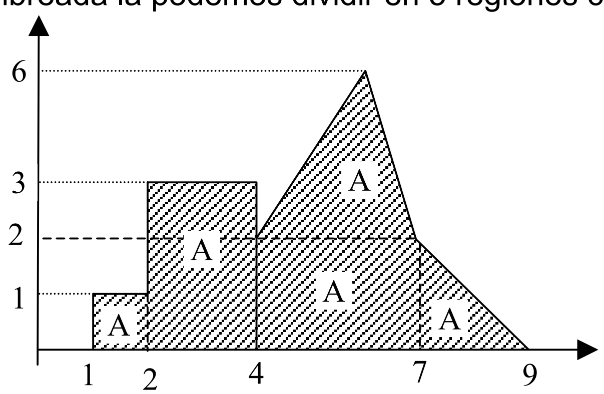
OBJ 10 PTA

Calcula el área de la región sombreada



Solución

La región sombreada la podemos dividir en 5 regiones como se indica en la figura



Ahora calculamos el área de cada una de las regiones que hemos señalado y e siendo el área total, la sumas de estas. De esta manera tenemos:

área A1 = 1.1 = 1 área A2 = 2.3 = 6 área A3 = 3.2 = 6

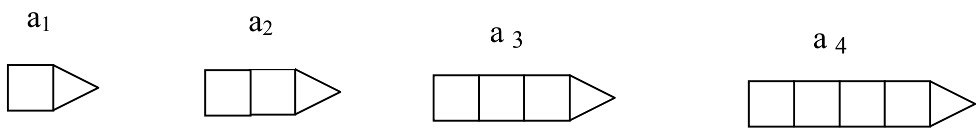
área A4= 3. 4 / 2 = 6 área A5= 2.2 / 2 = 2

Área Total = 1 + 6 + 6 + 6 + 2 = 21

♦

OBJ 11 PTA 11

A continuación te presentamos una sucesión de figuras elaboradas con palillos de dientes:



Para la primera figura se usan cinco palillos, para la segunda ocho, para la tercera 11 y así sucesivamente. Determina cuántos palillos se necesitan para elabora la figura 32 de la sucesión.

Solución

Si observamos las figuras podemos ver que una figura se forma agregando tres palillos a la figura anterior. De esta manera estamos en presencia de una progresión aritmética cuyo primer término se construye con seis palillos y razón r = 3.

Entonces la figura 32 tiene:

$6 + (32 - 1)\, r = 6 + 31.3 =$ **99 palillos**. ♦

Matemáticas 176

OBJ 10 PTA 10

Se tienen dos bienes A y B, cuya diferencia en el precio inicial es de Bs. 50 000, siendo A más cara que B.
La velocidad de depreciación del bien A es de Bs. 15 000/año, mientras que la del bien B es de 10 000/año.
En un momento dado ambos bienes tienen un valor de Bs. 80 000; determina los valores de recuperación de dichos bienes si la duración útil de los mismos se ha estimado en 10,50 años.

Solución

Sean:

$$V_t^A = V_0^A - 15.000\, t \qquad V_t^B = V_0^B - 10.000\, t$$

las funciones de valor de los bienes A y B, respectivamente (Ver página 58 del Módulo IV).

Por condiciones del problema se tiene que:

$$V_0^A - V_0^B = 50000.$$

Supongamos que el valor común del bien A y del bien B, de Bs. 80.000, ocurre al cabo de "t_1" años; es decir:

$$80\,000 = V_0^A - 15.000\, t \qquad [1]$$

$$80\,000 = V_0^B - 10.000\, t \qquad [2]$$

Restando ambas expresiones se tiene:

$$0 = \left(V_0^A - V_0^B\right) - 5000\,t_1.$$

Pero $\left(V_0^A - V_0^B\right) = 50000$, por lo que: $0 = 50000 - 5000\,t_1.$

De donde $t_1 = 10$. Sustituyendo este valor de $t_1 = 10$ en [1] y [2], se obtienen los valores de $V^A{}_0$ y $V^B{}_0$, respectivamente; de esta manera:

$$V_0^A = 80000 - 15000\,(10) = 230000 \qquad V_0^B = 80000 - 10000\,(10) = 180000$$

Las funciones de valor de cada bien son entonces:

Para el bien A: $V_t^A = 230000 - 15000\,t.$

Para el bien B: $V_t^B = 180000 - 10000\,t.$

Los valores de recuperación se tendrán ahora sustituyendo en dichas expresiones el valor de t = 10, 50.

Valor de recuperación del bien A =

$$V_t^A = 230000 - 15000\,(10{,}50) = 230000 - 157500 = 72500.$$

Valor de recuperación del bien B =

$$V_t^B = 180000 - 10000\,(10{,}50) = 180000 - 105000 = 75000. \quad \blacklozenge$$

OBJ 11 PTA 11

Se sabe que la ecuación de transformación de productos en una determinada empresa, es de la forma:

$$y = \begin{cases} -x^2 + bx + c\,, & 0 \le x \le 40 \\ -dx + e\,, & 40 \le x \le f \end{cases}$$

siendo "**x**" la cantidad producida del bien A e "**y**" la correspondiente al bien B. Además, se sabe que:

- La cantidad máxima que se puede producir del bien A es 90.
- La cantidad máxima que se puede producir del bien B es 70.
- Cuando se producen 40 unidades de A, se producen también 40 de B.

Obtén: La expresión analítica de la función y = y(x), es decir, determina los valores de **b, c, d, e** y **f**.

Solución

Para encontrar la expresión analítica de la función y = y(x), debemos determinar las constantes: **b, c, d, e** y **f** que aparecen en su formulación.

Por condiciones del problema, para x = 0, y = 70, y , para y = 0, x = 90; esto se traduce en:

$$70 = c \qquad [1]$$

$$-d\,(90) + e = 0 \qquad [2]$$

Por otro lado, para x = 40, y = 40; es decir:

$$-d\,(40) + e = 40 \qquad [3]$$

$$-40^2 + 40\,b + c = 40 \qquad [4]$$

restando [2] – [3], se tiene:

$$-50\,d = -40 \Rightarrow d = 0{,}8.$$

Sustituyendo el valor d = 0,8 en [2] y resolviendo para b se tiene que:

$$e = 90\,d = 90\,(0{,}8) = 72,$$

sustituyendo c = 70 en [4] y resolviendo para b se tiene que:

$$-40^2 + 40\,b + 70 = 40 \Rightarrow b = 39{,}25.$$

Obviamente que f = 90, ya que corresponde al mayor valor de **x**.

En resumen, la función y = y(x) adopta la forma:

$$y = \begin{cases} -x^2 + 39{,}25\,x + 70, & 0 \le x \le 40 \\ -0{,}8\,x + 72, & 40 \le x \le 90 \end{cases}$$

Matemáticas 177

OBJ 10 PTA 10

Para el logro del objetivo debes responder al menos **dos** partes correctamente

Escribe los siguientes enunciados utilizando algunas de las siguientes palabras: **todo, cualquier, cualquiera, para todo, existe, existe un, existen**,; de tal manera que el enunciado se satisfaga para todos los elementos o para algunos.

a. Si x es un número real negativo, entonces $x^3 < 0$

b. La ecuación x + sen x = 0 tiene solución en **IR**.

c. Si p es un número primo, entonces $p^2 - 1$, también lo es

Solución

Existen varas maneras de escribir los enunciados usando la palabra indicadas. Presentamos algunas de ellas.

a. Si x es un número real negativo **cualquiera**, entonces $x^3 < 0$

Todo número real negativo x, verifica que $x^3 < 0$

b. **Existe** solución de la ecuación x + sen x = 0 en **IR**.

Existe $x \in$ **IR** tal que x + sen x = 0..

c. **Para todo** número primo p, se tiene que $p^2 - 1$, también lo es.

OBJ 11 PTA 11

Un vagón de un tren puede transportar al máximo 58 recipientes y una carga máxima de 200 toneladas. Los recipientes de una cierta mercancía A pesan 5 toneladas cada uno y los recipientes de otra mercancía B pesan 2 toneladas cada uno. Se quiere enviar al menos 15 recipientes de la mercancía A y 12 de la mercancía B.
Construye un modelo matemático que represente la situación planteada.

Solución

Ver solución al problema 3 a), Parte II de la Autoevaluación V, página 117 del Módulo IV (177) del Texto.

♦